DOI: https://doi.org/10.5592/CO/ZT.2021.08

PRIMJENA DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE U PARAMETARSKOM MODELIRANJU LJUSKASTIH STRUKTURA U GRASSHOPPERU

THE APPLICATION OF DIFFERENTIAL GEOMETRY TO PARAMETRIC MODELLING OF SHELL STRUCTURES IN GRASSHOPPER

Nino Koncul[1]
(1) Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Fra Andrije Kačića-Miošića 26, Zagreb, R. Hrvatska, nino.koncul@grad.unizg.hr

Sažetak

Ovaj rad je namijenjen postavljanju temelja za proučavanje krivulja i ploha pomoću diferencijalne geometrije u svrhu opisa krivulja i ploha parametarski, kako bi pomoću Grasshoppera proučavana svojstva ponudila inovativne pristupe u rješavanju mogućih statičkih i strukturalnih problema. Metode parametarskog modeliranja u Grasshopperu su također istražene u svrhu diferencijalnog pristupa pri rješavanju prostornih problema.

Ključne riječi: diferencijalna geometrija, parametarsko modeliranje, ljuskaste strukture

Abstract

This paper is intended to set the basis for researching curves and surfaces with the tools of differential geometry so as to attain a description of the curves and surfaces parametrically with the purpose of introducing new and innovative principles in the process of solving possible statical and structural problems. Methods of parametric modelling in Grasshopper are investigated so as to use differential geometry as a tool to solve spatial and statical constraints of various problems.

Keywords: differential geometry, parametric modelling, shell structures

1. Uvod

Zamislimo neka je ploha zadana parametarski:

$$X(u,v)=\left(x(u,v),y(y,v),z(u,v)\right)$$

pri čemu parametri u i v predstavljaju koordinate na plohi. Ako zamislimo da je parametar u neka konstantna veličina, a v varijabla, tada će skup točaka u prostoru koji zadovoljava ta svojstva biti krivulja na toj plohi. Uočimo, parametri u i v čine „mrežu“ na plohi X.

Ako zamislimo jednu točku na plohi, tada toj točki možemo pridružiti tangencijalne vektore u smjeru parametara u i v (krivulja te plohe koje prolaze tom točkom):

$$g_1=\frac{dX(u,v)}{du}=\left(\frac{dx}{du},\frac{dy}{du},\frac{dz}{du}\right)$$ (tangencijalni vektor u toj točki u smjeru parametra u)

$$g_2=\frac{dX(u,v)}{dv}=\left(\frac{dx}{dv},\frac{dy}{dv},\frac{dz}{dv}\right)$$ (tangencijalni vektor u toj točki u smjeru parametra v)

pri čemu te vektore nazivamo kovarijantnim vektorima baze. Ti vektori neće biti nužno niti jedinični niti međusobno okomiti. Kovarijantni vektori su nam potrebni kako bismo definirali koeficijente prve fundamentalne forme (komponente metričkog tenzora):

$$E=g_1\cdot g_1=\frac{dX(u,v)}{du}\cdot\frac{dX(u,v)}{du}$$
$$F=g_1\cdot g_2=\frac{dX(u,v)}{du}\cdot\frac{dX(u,v)}{dv}$$
$$G=g_2\cdot g_2=\frac{dX(u,v)}{dv}\cdot\frac{dX(u,v)}{dv}$$

Prva fundamentalna forma je pogodna za računanje duljina krivulja duž smjerova u i v, dok je pomoću kovarijantnih vektora baze moguće opisati tangencijalni vektor v, vektor normale n i vektor binormale u zadanoj točki plohe.

Nadalje, pokazuje se korisnim definirati dodatne vektore g^i i g^2 (kontravarijantne vektore baze) u zadanoj točki plohe:

$g^i\cdot g_j=\delta^i_j$ i $g^i\cdot n=0,$ pri čemu je $\delta^i_j=1$ ako $i=j,$ a $\delta^i_j=0$ ako $i\neq j.$

Uočimo, zbog činjenice da je skalarni umnožak pripadajućih kontravarijantnih vektora s normalom na plohu jednak nuli, zaključujemo da kontravarijantni vektori leže u istoj ravnini kao i kovarijantni vektori baze, te da su okomiti na na one vektore s kojima im je skalarni umnožak jednak nuli.

Razlog za definiranje dviju različitih baza za odabranu točku plohe leži u pogodnosti odabira za izračun daljnjih elemenata plohe, poput vlačne i tlačne čvrstoće te krutosti materijala od kojih je ploha konstruirana. U dvije dimenzije (naša ploha je opisana pomoću dvije varijable)za plohu od izotropnog materijala konstante elastičnosti je moguće izraziti pomoću Youngovog modula elastičnosti i Poissonovog koeficijenta [1]. Također, važan element plohe je njegova zakrivljenost koju definiramo kao funkciju (vektor) koja „mjeri“ promjenu smjera tangencijalnog vektora u zadanoj točki plohe:

$$\kappa = \frac{dv}{ds}.$$

Vektor zakrivljenosti se može rastaviti u dvije komponente:

$$\kappa = \kappa_g + \kappa_n$$

pri čemu je κ_g geodetska zakrivljenost plohe, a κ_n normalna zakrivljenost plohe.

Kako bismo jednostavnije zapisali kako izračunati κ_g i κ_n definirajmo:

$$g_{1,1} = \frac{d^2 X\left(u,v\right)}{du^2}$$

$$g_{1,2} = \frac{d^2 X\left(u,v\right)}{du\,dv} = \frac{d^2 X\left(u,v\right)}{dv\,du} = g_{2,1}$$

$$g_{2,2} = \frac{d^2 X\left(u,v\right)}{dv^2}$$

Sada, pomoću vektora normale n i drugih derivacija $g_{i,j}$ možemo definirati elemente druge fundamentalne forme:

$$L = n \cdot g_{1,1}$$

$$M = n \cdot g_{1,2}$$

$$N = n \cdot g_{1,2}$$

Pomoću elemenata prve i druge fundamentalne forme je moguće definirati i opisati srednju zakrivljenost:

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2\left(EG - F^2\right)},$$

i Gaussovu zakrivljenost:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

2. Zaključno razmatranje

Trenutno istraživanje je provedeno na određenom broju pravčastih ploha i vitoperih pravčastih ploha. Primjenjene su grupe geometrijskih transformacija te je proučavan njihov utjecaj na prvu i drugu fundamentalnu formu tih ploha, a zatim kako te promjene utječu na druga svojstva te plohe. U Grasshoperu su te plohe modelirane poput ljuskastih struktura koristeći parametarsko modeliranje. Daljnji tijek istraživanja bi obuhvaćao druge plohe, te bi tema mogla biti proširena da obuhvati i istraživanje održivih inovativnih materijala i metode njihove iskoristivosti s obzirom na geometriju ljuskastih i modularnih struktura.

Literatura

[1] [compiled by] S. Adriaenssens, P.Block, D. Veenendaal,C. Williams: Shell structures for architecture: form finding and optimisation, Routledge, 2014.
[2] A. E. Green, W. Zerna: Theoretical Elasticity, Carrendon Press, 1963.
[3] W. Kuhnel: Differential geometry: Curves-Surfaces-Manifolds (Student mathematical library) 3rd edition, AMS, 2015.